Άσκηση: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Ν.δ.ο. $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0.$

για κάποιο πολυώνυμο βαθμού $2n-2$

$P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) + (2-3nx^2)P_n(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$

β) $f^{(k)}(0) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

Απόδειξη:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

α) Για $x \neq 0$

$$f'(x) = e^{-1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

Άρα, για $n=1$ ισχύει το ζητούμενο με $P_1(x) = 2$ βαθμού $2 \cdot 1 - 2 = 0$

Υποθέτουμε ότι $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}, \ \forall x \neq 0$, όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο με $\deg(P_n(x)) = 2n-2$.

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \frac{(P_n(x) \cdot e^{-1/x^2})' x^{3n} - (P_n(x) e^{-1/x^2})(x^{3n})'}{(x^{3n})^2} =$$

$$= \frac{(P_n'(x) \cdot e^{-1/x^2} + P_n(x) \cdot 2x^{-3} \cdot e^{-1/x^2}) x^{3n} - (P_n(x) \cdot e^{-1/x^2}) \cdot 3n\, x^{3n-1}}{x^{6n}} =$$

$$\boxed{\div x^{3n-3}}$$

$$= \frac{P_n'(x) \cdot e^{-1/x^2} \cdot x^3 + 2P_n(x) \cdot e^{-1/x^2} - P_n(x) \cdot e^{-1/x^2} x^2\, 3n}{x^{3n+3}} =$$

$$= \frac{x^3 P_n'(x) + (2 - 3n x^2) P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \cdot e^{-1/x^2}.$$

Θέτουμε $P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) + (2-3nx^2) \cdot P_n(x)$

Έστω $\theta \neq 0$, ο συντελεστής του x^{2n-2} στο πολυώνυμο $P_n(x)$.

Το $x^3 P_n'(x)$ έχει συντελεστή του x^{2n} ίσο με $\beta(2n-2)$.
Άρα, το $(2-3nx^3)P_n(x)$ έχει συντελεστή του x^{3n} το $\beta(-3n)$.

Άρα, ο συντελεστής του x^{2n} στο πολυώνυμο $P_{n+1}(x)$ είναι $\beta(2n-2)+\beta(-3n)\neq 0$. Άρα, $\deg(P_{n+1}(x)) = 2(n+1)-2 = 2$.

β) <u>1ο επαγωγικό βήμα:</u>

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα όρια $x\to 0^+$ και $x\to 0^-$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x} \underset{y\to+\infty}{\overset{\text{θέτω } y=1/x}{=\!=}} \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

De L'Hospital

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-1/x^2}}{x} \overset{\text{θέτω } y=-x}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} -\left(\frac{e^{-1/y^2}}{y}\right) = -\left(f'_+(0)\right)=0.$$

Συνεπώς, $f'(0)=0$.

<u>γενικό επαγωγικό βήμα:</u>

Υποθέτουμε ότι $f^{(n)}(0)=0$.

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}\cdot e^{-1/x^2}$$

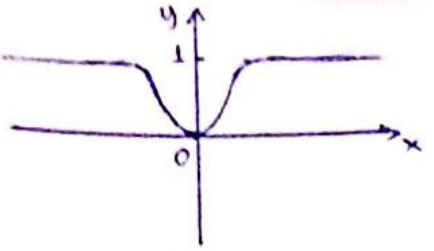
Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα όρια στο $x\to 0^+$ και $x\to 0^-$.

$$f_+^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}\cdot e^{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{P_n\left(\frac{1}{y}\right)}{e^{y^2}}\cdot y^{3n+1}=0$$

Αλλαγή μεταβλητής, θέτω $y=1/x$ άρα $y\to+\infty$.

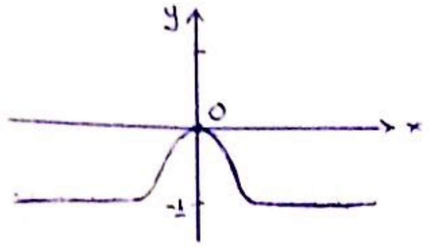
Με όμοια επιχειρήματα, $f_-^{(n+1)}(0)=0$. Άρα, $f^{(n+1)}(0)=0$.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



$f^{(n)}(0) = 0, \forall n.$

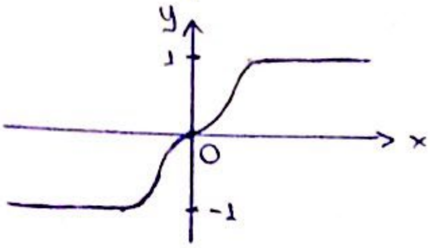
Η f έχει ελάχιστο στο 0.



$g = -f$

Η g έχει μέγιστο στο 0.

$g^{(n)}(0) = 0, \forall n.$



$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-1/x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

$h^{(n)}(0) = 0, \forall n.$

Η h δεν έχει ακρότατο στο 0.

Για οποιαδήποτε από τις 3 προηγούμενες συναρτήσεις $(f(x), g(x) = -f(x), h(x))$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n στο 0 είναι: $T_{n,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$, είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Έτσι, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_{n,f,0}(x) = 0 \to 0 \neq f(x)$.

Η σειρά Taylor συγκλίνει αλλά όχι στο $f(x)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν θέλατε να υπολογίσετε το $\sin 2$, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-5}.

$f(x) = \sin x.$

$\sin 2 = T_{2n+1,f,0}(2) + R_{2n+1,f,0}(2)$

όπως έχουμε δείξει: $|R_{2n+1,f,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$

Αναζητούμε n ώστε $\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-5}$.

$$\frac{2^{12}}{12!} = \frac{4096}{479001600} < 10^{-5}.$$

Άρα, $\sin 2 = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R$, με $|R| < 10^{-5}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{3,f,0}(x)$ για
$f(x)=e^{\sin x}$

$$f'(x)=e^{\sin x}\cdot\cos x$$

$$f''(x)=e^{\sin x}\cdot\cos^2 x+e^{\sin x}\cdot(-\sin x)$$

$$f'''(x)=e^{\sin x}\cos^3 x+2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot e^{\sin x}+e^{\sin x}\cos x(-\sin x)-\cos x\, e^{\sin x}=$$

$$=e^{\sin x}(\cos^3 x-3\cos x\sin x-\cos x)$$

$f(0)=1$

$f'(0)=1$

$f''(0)=1$

$f'''(0)=0$

$$T_{3,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}.$$

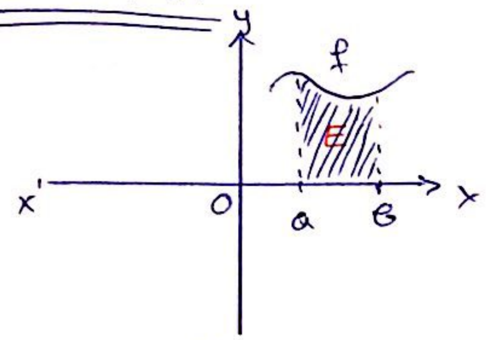
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)^3+\dots$$

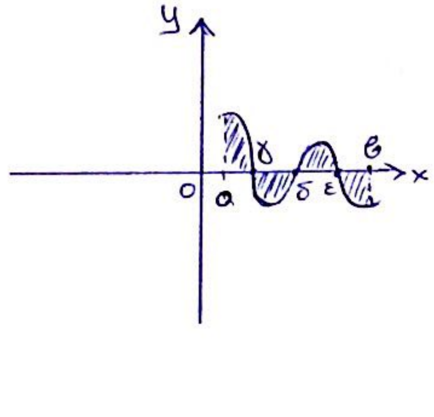
"ΕΜΒΑΔΑ"

1)

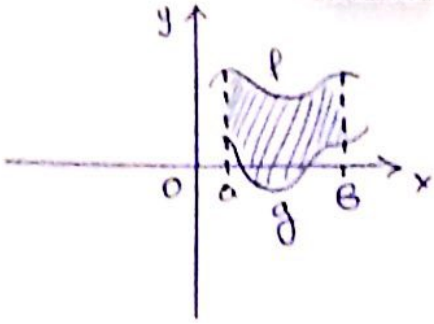


$f\geq 0$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τη γραφική παράσταση της f, είναι $E=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

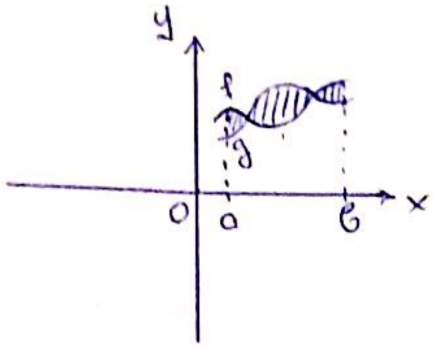
2)



Γενικά, αν δεν έχουμε $f\geq 0$, αν f ολοκληρώσιμη $E=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\delta -f(x)dx+\int_\delta^\varepsilon f(x)dx+\int_\varepsilon^\beta -f(x)dx$.

3) 

Αν $g \leq f$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $x=\alpha$, $x=\beta$ και τις γραφικές παραστάσεις των f, g, είναι $E=\int_\alpha^\beta f(x)-g(x)\,dx$

4) 

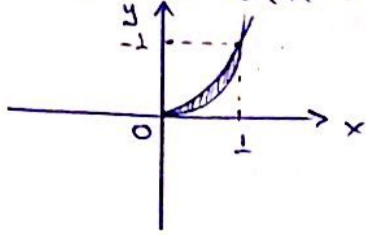
Αν δεν είναι καμία από τις f, g μεγαλύτερη της άλλης σε όλο το $[\alpha, \beta]$,

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Παραδείγματα:

α) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2$.

$x^3=x^2 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=1$



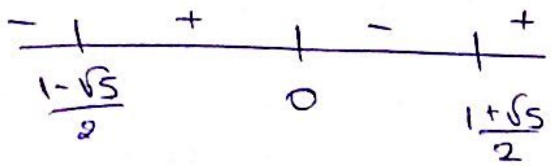
Για $x \in [0,1]$

$$E=\int_0^1 x^2-x^3\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2$.

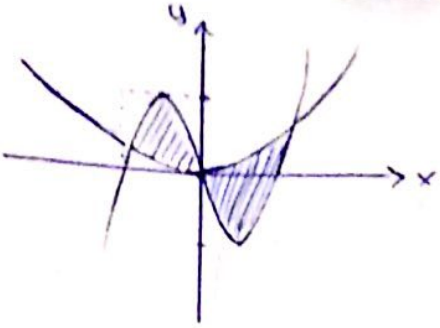
$$x^3-x=x^2 \Rightarrow x^3-x^2-x=0 \Rightarrow x(x^2-x-1)=0 \; (*) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt5}{2} \\ x=0 \\ x=\frac{1+\sqrt5}{2} \end{cases}$$

$$(*) \; x\left(x-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=0$$



$$f(x)>g(x) \Rightarrow x\left(x-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)>0$$

$$E=\int_{\frac{1-\sqrt5}{2}}^{0} x^3-x-x^2\,dx+\int_0^{\frac{1+\sqrt5}{2}}-(x^3-x-x^2)\,dx$$



Μια χρήσιμη αντικατάσταση για ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\cos x, \sin x$.

$I = \int P(\cos x, \sin x)\,dx$, όπου $P(u,v)$ πηλίκο δύο πολυωνύμων των μεταβλητών u, v.

Συχνά, τέτοια ολοκληρώματα υπολογίζονται με την αντικατάσταση $y = \tan\frac{x}{2}$.

- $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$

- $\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\tan(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2}) = 2\tan(\frac{x}{2})\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{2y}{1+y^2}$

- $y = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan y \Rightarrow x = 2\arctan y \Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+y^2}\,dy$.

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε:

$\int P\left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}, \dfrac{2y}{1+y^2}\right)\dfrac{2}{1+y^2}\,dy$, το οποίο είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης και υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

Παραδείγματα:

α) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$

$y = \tan(\frac{x}{2})$ άρα $\cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$ και $\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}$ και $dx = \dfrac{2}{1+y^2}\,dy$.

Έτσι, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο εξής:

$$\int \frac{1+\frac{2y}{1+y^2}}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1+y^2+2y}{2}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,dy$$

στο οποίο θα κάνατε ανάλυση σε απλά κλάσματα.